مترجم: محمدحسام قاسمی
کارشناس ارشد ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

تیزهوشی در ریاضی و خطاها: دو مفهوم کلیدی در ریاضیات دورهٔ ابتدایی

اشاره

در ادامهٔ ترجمهٔ مفهوم‌های کلیدیِ ریاضیات دورهٔ ابتدایی، در این شماره ترجمهٔ دو مفهوم تیزهوشی در ریاضی و خطاها، ارائه می‌شود.

کلیدواژه‌ها: مفهوم‌های کلیدیِ ریاضیات دورهٔ ابتدایی، تیزهوشی در ریاضی، خطاها

معرفی مفهوم تیزهوشی در ریاضی

بیان تعریفی دقیق از مفهوم تیزهوشی در ریاضی[1]، چندان کارآمد نیست، به این دلیل که برخورداری افراد از یک استعداد خاص و خدادادی در ریاضی، هنوز به‌طور علمی قابل اثبات نیست. البته ثابت شده است که شرایط ژنتیکی و وراثت می‌توانند در تیزهوش بودن یک فرد مؤثر باشند، با این حال، تعریف‌های ارائه شده در این‌باره، هیچ‌کدام جامع و مانع نیستند. با این وجود، هایلاک (۲۰۰۴) معتقد است که «دانش‌آموزی که در یک گروه سنی خاص از جانب معلم و همکلاسی‌هایش، دانش‌آموز شاخص و سرآمد کلاس ریاضی معرفی شود و نسبت به هم‌سن‌وسالان خود، باهوش و عاقل تشخیص داده شود»، معنایش این است که در ریاضی، **تیزهوش** است (ص. ۱۵۱). معلمان هم دلیل این سرآمدی را نه فقط توانایی بالای چنین دانش‌آموزانی در کسب نتایج عالی در امتحانات، قدرت حافظهٔ بالا و مهارت اجرایی خیلی خوب آن‌ها در انجام محاسبات می‌دانند، بلکه به توانایی‌های خاص آن‌ها نیز اشاره دارند؛ توانایی‌هایی مانند، درک و فهم عالی، خلاقیت و ابتکار و تجزیه‌وتحلیل شگفت‌انگیز مسائل و فعالیت‌های ریاضی، که باعث برجسته و خاص بودن این دانش‌آموزان در کلاس ریاضی می‌شود.

توضیح و بحث دربارهٔ تیزهوشی در ریاضی

ریاضی یکی از موضوعات اصلی در برنامهٔ درسی مدرسه‌ای است که در آن، توانایی‌های مورد انتظار از دانش‌آموز از قبل مشخص می‌شود. اهداف نیز در همان راستای توانا شدن تعریف شده و تحقق آن‌ها مورد توجه نظام آموزشی قرار می‌گیرد. چون این انتظارات معمولاً براساس سن و پایهٔ دانش‌آموزان سطح‌بندی می‌شود، ممکن است در یک پایه متناسب، با ظرفیت‌های بالاترِ دانش‌آموزان توانمندتر در ریاضی (تیزهوش در ریاضی) نباشند. در نتیجه، معلمان مدارس ابتدایی معمولاً در مواجهه با چنین دانش‌آموزانی دچار مشکل می‌شوند. آن‌ها نمی‌دانند که آیا باید به نیازهای عمومی کلاس توجه بیشتری داشته باشند یا این که رویه‌ای در تدریس اتخاذ کنند که پاسخگوی نیازهای این دست دانش‌آموزان خاص نیز باشد. در اینکه باید معلمان، این دانش‌آموزان را در استفاده از حداکثر توانایی‌های بالقوهٔ خود یاری کنند، شکی نیست اما گاهی معلمان گله‌مندند که حتی با وجود توجه به نیازهای این دانش‌آموزان، باز انگار روش‌های آن‌ها ناکافی و نامناسب به‌نظر می‌رسد. دلیل سردرگمی معلمان در این‌باره، شاید تنوع دانش‌آموزان به اصطلاح **تیزهوش** باشد، یعنی درست است که گاهی به یک دانش‌آموز با ویژگی‌های خاص، عنوان مستعد در ریاضی اطلاق می‌شود، اما معلوم نیست که دقیقاً، کدام یک از ویژگی‌های او، نشان‌دهندهٔ تیزهوشی وی است؟ و آیا همهٔ ویژگی‌ها، بین آن دانش‌آموزان مشترک و یکسان است؟

بعضی از پژوهشگران، موضوع **تیزهوشی و هوشمندی**[۲] را به‌هم مرتبط دانسته و آن‌ها را در یک حوزهٔ مشترک وارد کرده و مورد مطالعه قرار می‌دهند و فرد مستعد و تیزهوش در ریاضی را در اصل، فردی برخوردار از نوع خاصی از هوش می‌دانند. گاردنر[۳] (۲۰۰۰) در مدل **هوش‌های چندگانه** خویش، انواعی از هوش را معرفی کرده است که نسبتاً، قائم‌به‌ذات بوده، و مستقل از هم عمل می‌کنند. یکی از این هوش‌ها، «هوش منطقی ـ ریاضی[۴]» است که به دو شاخهٔ هوش تحلیلی (استدلال‌های منظم و منطقی) و هوش ترکیبی (شناسایی الگوها و تعمیم‌سازی) تقسیم شده است. منظور گاردنر از هوش تحلیلی آن است که یک فرد در هنگام حل یک مسئله، به‌خوبی اجزای مختلف مسئله را مورد تحلیل قرار داده، مسئله را به بخش‌های مختلف تجزیه کند، فرضیه‌ها را مورد بررسی قرار دهد و سعی کند هدف و خواستهٔ آن مسئله را به‌خوبی بشناسد. در مقابل، منظور او از هوش ترکیبی این است که فرد به‌خوبی قادر باشد از مثال‌ها، نمونه‌ها، غیرنمونه‌ها و تجربه‌های مختلف درس گیرد و بتواند با ترکیب اجزای مختلف پدیده‌ها با یکدیگر و مرتبط کردن آن‌ها به هم، به یک نتیجهٔ منطقی یا تعمیمی مناسب در مورد آن‌ها، دست یابد.

این دو شاخه از هوش منطقی- ریاضیاتی را به‌خوبی می‌توانیم در رفتار دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی مشاهده کنیم. در ادامه، به برخی از ویژگی‌های مشترک بین دانش‌آموزان تیزهوش که آن‌ها را از سایر همکلاسی‌هایشان متمایز می‌سازد، اشاره می‌کنیم:

- هنگام ارائهٔ مطالب جدید از جانب معلم، از سرعت گیرایی بالایی برخوردارند؛
- با اعتماد به نفس زیاد از نمادهای ریاضی استفاده می‌کنند، گویی برایشان کار با نمادها، راحت‌تر از کار با مثال‌های ملموس است و به‌سرعت، بین مثال‌های ملموس ونمادها، پل می‌زنند؛
- تمایل عجیبی به برقراری ارتباط بین مباحث مختلف ریاضی و مرتبط کردن آن‌ها به یکدیگر دارند؛
- به‌سرعت، متوجه نکتهٔ ریاضی یا محاسباتی موجود در مسئله‌ها می‌شوند؛
- غالباً، الگوها و روابط را به‌صورت فی‌البداهه، به دیگر موقعیت‌ها تعمیم می‌دهند؛
- به‌راحتی می‌توانند یک روش مشخص را که برای حل یک مسئلهٔ خاص به‌کار برده‌اند، به دیگر مسائل تعمیم دهند و شناسایی کنند که کدام مسائل را می‌توان به کمک آن روش‌ها حل کرد و برای کدام مسائل، امکان استفاده از آن‌ها نیست؛
- زمانی که مسئله‌های معمولی را حل می‌کنند، مراحل واسطه و میانی و به قول خودشان **وقت‌گیر** و **تشریفاتی** را حذف می‌کنند؛
- برای رسیدن به جواب پافشاری می‌کنند و در این راه، روش‌ها و استراتژی‌های مختلف را امتحان می‌کنند؛
- ذهنی منعطف و شخصیتی خطرپذیر دارند و خود را به قواعد یکنواخت و فرآیندهای رایج، محدود نمی‌کنند؛
- سرعت بالایی در بازخوانی نتایج، روش‌ها و اصولِ از قبل فراگرفته شده، دارند.

همان‌طور که از این فهرست دیده می‌شود، ویژگی‌های دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، اصلاً شامل تکنیک‌های خاص و اعجازهای محاسباتی- عددی نیست. کروتتسکی[۵]

داشتن تفکر خلاق در ریاضی، تا آنجا اهمیت دارد که می‌توان حتی آن را معیار اصلی سنجش تیزهوشی در ریاضی دانست که بعد از تفکر تحلیلی و تفکر ترکیبی، سومین ویژگی تیزهوشی در ریاضی است. به گفته هایلاک (۲۰۰۴: ۱۵۹)، دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، کسانی نیستند که تنها در حوزه‌های معمول (مهارت‌ها، دانش، درک و اجرا) موفق‌اند، بلکه آن‌هایی هستند که در زمینه‌هایی غیرمعمول (محدود نکردن خود به روش‌ها و چارچوب‌های خاص و داشتن تفکری خلاق و واگرا) نیز، موفق هستند

(۱۹۷۶) معتقد است که به‌هیچ وجه توانایی‌های خاصِ محاسباتی، نمی‌توانند نمایانگر تیزهوشی در ریاضی باشند. همچنین، تأکید بر توانایی انجام محاسبات با تکنیک‌های خاص و نکته‌دار، در برنامهٔ درسی هیچ کشوری، جزو اهداف یا استانداردهای برنامهٔ درسی ریاضی نیست. بلکه برعکس، بیشتر مباحث در برنامه‌ها، حول ایجاد توانایی در فرآیندهای شناختی مانند انعطاف‌پذیر بودن و عدم اصرار بر استفاده از روش‌های معمول و یکنواخت و تقویت تفکر خلاق، متمرکزند. داشتن تفکر خلاق در ریاضی، تا آنجا اهمیت دارد که می‌توان حتی آن را معیار اصلی سنجش تیزهوشی در ریاضی دانست که بعد از تفکر تحلیلی و تفکر ترکیبی، سومین ویژگی تیزهوشی در ریاضی است. به گفته هایلاک (۲۰۰۴: ۱۵۹)، دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، کسانی نیستند که تنها در حوزه‌های معمول (مهارت‌ها، دانش، درک و اجرا) موفق‌اند، بلکه آن‌هایی هستند که در زمینه‌هایی غیرمعمول (محدود نکردن خود به روش‌ها و چارچوب‌های خاص و داشتن تفکری خلاق و واگرا) نیز، موفق هستند.

با توجه به این که دانش‌آموزان تیزهوش، از سطوح بالای تفکر مانند راه‌حل‌های ترکیبی، روش‌ها و راهکارهای ابتکاری، تفکر تحلیلی و استدلال‌های منطقی پیشرفته بهره‌مندند، نمی‌توان نیازهای خاص این دانش‌آموزان را به‌راحتی و براساس برنامهٔ درسی ارائه شده به دیگر دانش‌آموزان معمولی، برآورده کرد. در نتیجه، دانش‌آموزان تیزهوش نیاز دارند که برایشان، برنامه‌ای خاص و متناسب با استعدادشان در نظر گرفته شود، یا حداقل معلمان آن‌ها، در روش‌های تدریس و طراحی درس‌های خود، به نیازهای ویژه آنان نیز، توجه داشته باشند.

در ادامه، چند پیشنهاد و راهنمایی برای معلمان و برنامه‌ریزان درسی، جهت توجه بیشتر به نیازهای دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، ارائه می‌کنیم:

- استفاده از دانش و مهارت‌های ریاضی برای حل مسائل غیرمعمول و ناآشنا و ایجاد فرصت‌هایی برای پرداختن به چنین مسائلی در کلاس؛
- طرح مسئله‌هایی که در آن‌ها، از راهنمایی‌های کمتری استفاده شده است، به این معنا که مسئله‌ها، دارای کمترین اطلاعاتِ لازم، برای حل باشد. همچنین، مسئله‌هایی ارائه شوند که دارای اطلاعات اضافه، غیرضروری و حتی گمراه‌کننده باشند!
- آموزش شناسایی فرض‌ها و تعیین اهداف (حکم)، هم‌چنین شناساییِ اهداف و نتایج ثانویه از حل یک مسئله؛
- دادن فرصت به دانش‌آموزان تا بتوانند از استدلال‌های منطقی و راه‌حل‌های خود دفاع کنند و آن‌ها را توضیح دهند؛
- در اختیار قرار دادن مفاهیم و مهارت‌های جدید و به روز شده به دانش‌آموزان تیزهوش تا برایشان، فرصت‌هایی جهت گسترش تجربه‌ها، تفکرات و فرآیندهای ریاضی فراهم شود؛
- ارائه مثال‌هایی برای کشف الگوهای عددیِ حاصل از الگوهای هندسی و برعکس؛
- ارائه تعمیم‌ها به‌صورت جمله‌های جبری و نمادین؛
- آموزش شناسایی متغیرهای مستقل از متغیرهای وابسته و دست‌کاری متغیرهای مستقل برای مشاهدهٔ تأثیر آن‌ها بر متغیرهای وابسته (مثلاً دست‌کاری در اندازهٔ طول ضلع یک مربع یا شعاع یک دایره و مشاهدهٔ چگونگی تغییر مساحت آن‌ها)؛
- استفاده از جدول‌های دوسویه برای خلاصه‌سازی جهت کشف الگوها (روش جدول‌بندی)؛
- ایجاد موقعیت‌هایی برای تحقیق، حدس زدن، فرضیه‌سازی، تعمیم‌دادن و ارزیابی آن‌ها؛
- دادن فرصت‌هایی به دانش‌آموزان برای شناسایی قواعد عمومی مشترک بین فرآیندهای مختلف که در موقعیت‌های مشابه دیگر نیز، قابل اجرا باشند؛
- تشویق دانش‌آموزان تیزهوش هنگام پافشاری بر حل یک مسئله، احترام به روش‌های پیشنهادی آن‌ها و محدود نکردن تکنیک‌ها و راه‌حل‌های معلم به دایرهٔ کوچکی از روش‌های محاسباتی؛
- مشارکت دادن دانش‌آموزان تیزهوش در کارهایی که به استدلال‌های منطقی نیازمندند؛
- درگیر کردن دانش‌آموزان تیزهوش با موقعیت‌هایی که ظاهراً غیرمعقول‌اند، و استفاده از موقعیت‌های غیرثابت و انعطاف‌پذیر و چالش‌برانگیز به این منظور که تفکر آن‌ها به‌سمت واگرایی سوق یابد.

مثال‌های عملی

تانگاتا (یکی از نویسندگان کتابی که این بخش مربوط به آن است)، در تحقیقی که بر روی گروهی از دانش‌آموزان ممتاز و توانمند در ریاضی انجام داد، متوجه این واقعیت شد که یک دانش‌آموز، می‌تواند ممتاز باشد ولی تیزهوش نباشد. همچنین، مهم‌تر این است که حتی یک دانش‌آموز، می‌تواند ویژگی‌های تیزهوشی را داشته باشد، ولی از نظر کسب نمرات و نتایج، ممتاز نباشد. وی در تحقیق خود،

توانست دو دانش‌آموز ممتاز که آن‌ها را J و K نامیده بود، شناسایی کند که دارای چنین ویژگی‌های متفاوتی بودند.

J: یک دانش‌آمـوز موفق و ممتاز که نمی‌توان او را تیزهوش نامید

J، یکـی از دانش‌آموزانی بود که معلمـان او را به‌عنوان دانش‌آموز ممتاز کلاس می‌شناختند. او در یادگیری موارد رایج و استاندارد و کسب نمرات عالی در آزمون‌های ریاضی، بسیار خوب عمل می‌کرد. اما محقق دریافت که J، از اعتماد به نفس پایینی برخوردار بوده و زمانی که با مسـائل ناشناخته روبه‌رو می‌گردد، دچـار اضطراب می‌شـود، کارش را از بقیه پنهان می‌کند و تمایلی به خطرپذیری ندارد. J در تشخیص الگوهای عددی و فرآیند تعمیم‌سـازی ضعیف بود. در برقراری ارتباط با مسئله و روابط موجود بین اجزای آن، کُند عمل می‌کرد و زیاد فکر می‌کرد. اگرچه J در آزمون‌ها و ارزشـیابی‌های ملی، موفق به کسب نمرات عالی می‌شد، ولی با همهٔ این اوصاف، J نمی‌توانست دارای ویژگی‌های اصلی تیزهوش بودن در ریاضی باشد. در نتیجه از جانب پژوهشگر، به‌عنوان یک فرد تیزهوش در ریاضی، به رسمیت شناخته نشد.

K: یک دانش‌آموز تیزهوش اما با نمرات و نتایج ضعیف

در مقابل، K یک کودک ۹ سـالهٔ بازیگوش و نامرتب بـود که در مهارت‌های نوشـتاری و کتبـی، ضعیف عمل می‌کـرد. K در کلاس درس ریاضـی با رویکـرد معمول تدریس، عملکرد خوبی نداشـت. معلـم او را به‌عنوان یک دانش‌آموز ناموفق، بی‌دقت، بی‌انگیزه و بی‌میل نسـبت به انجام تکالیف خود، می‌شناخت.

در یک فعالیت، محقق یـک ورق روزنامه (با یادآوری اینکه هر ورق روزنامه چهار صفحه است) با شمارهٔ صفحات ۳۵، ۳۶، ۱۰۹ و ۱۱۰، در اختیار K قرار داد. K توانسـت به‌سرعت تشخیص دهد که تعداد کل صفحات این روزنامه چقدر اسـت، و بعد از این که باقی صفحات روزنامه را به او دادند، توانسـت ورق‌های روزنامـه را لای یکدیگر چیده و به‌صورت اصلی آن، مرتـب کند. محقق به این دانش‌آموز، یک ایدهٔ جبری سـاده داد و او را راهنمایی کرد که نماد n را بـرای تعداد صفحات روزنامه، m را برای تعداد ورق‌های روزنامه، f را برای شـمارهٔ صفحـهٔ روی نیم‌برگ اول، b را برای شـمارهٔ پشـت نیم‌برگ دوم و l و r را به‌ترتیب برای شـمارهٔ صفحه‌های چپ و راستِ دو صفحهٔ داخلی هر ورق روزنامه به‌کار گیرد. K به‌سرعت نتیجه گرفت که $n = m \times 4$. این دانش‌آموز، از بین جدول‌های مختلف که فقط یکی از آن‌ها نمایانگر روابط بین شماره‌های روزنامه بود، جدول زیر را که پاسخ صحیح بود، انتخاب کرد.

f	l	r	b
۱	۲	۷۱	۷۲
۳	۴	۶۹	۷۰
۵	۶	۶۷	۶۸
۷	۸	۶۵	۶۶
... و به همین ترتیب			

علاوه بر این، K توانست این تعمیم‌ها را نیز ارائه کند: «l و b همیشه فرد هستند»، «$b + n = ۲ + ۱$» و «$r + f = n$» که باعث شـگفتی محقق و معلم او شد. K حتی توانست این روابط را به‌خوبی توضیح دهد و از آن‌ها دفاع کند. وی توانست به‌خوبی نشان دهد که چگونه می‌تواند این نمادها را با در اختیار داشتنِ فقط یک ورق از روزنامه، به‌کار گیرد تـا تعداد صفحه‌هـای آن روزنامه را به دسـت آورد. K در پاسخ به سؤال محقق که از او پرسید «این روش برای کدام نشـریه‌ها کاربرد دارد؟»، گفت: «می‌توان این را برای همهٔ مجلات که هر ورق آن چهار صفحه‌ای است اعمال کرد». با مطالعهٔ رفتار K در این فعالیت و چند فعالیت مشابه دیگر، تانگاتـا برخی از ویژگی‌ها و توانایی‌هـای خاص او را که از نظر وی، تیزهوش در ریاضی محسـوب می‌شد، به‌صورت زیر فهرست کرد:

- توانایی خارق‌العاده در درک سـاختار اجزای به‌کار رفته در مسئله و توانایی زیاد در استدلال ریاضی؛
- توانایی تعمیم دادن الگوهای عددی و اسـتفادهٔ درست از چهـار عمل اصلی، مربعِ اعـداد و نمادهای جبری، برای تعمیم‌ها؛
- برخورداری از سطح مناسبی از اعتماد به نفس، پشتکار و علاقه و اصرار، برای حل مسائل ناآشنا؛
- داشتن حافظه‌ای خوب برای دریافت اصطلاحات و مفاهیم ریاضی، و توانایی بازخوانی درست آن‌ها در شرایط جدید.

مطالعهٔ بیشتر

مطالعات کروتتسکی (۱۹۷۶) را می‌توان نقطهٔ آغازین پژوهش‌های جدی با موضوع تیزهوشی در ریاضی دانست. کوشـی[۶] (۲۰۰۰a)، توصیه‌های نظری و عملی مختلف و

مفیـدی در زمینـهٔ تدریس ریاضی به کودکان مسـتعد و تیزهوش ارائه کرده اسـت. پورتـر[7] (۲۰۰۵) نیز به اصول خاصـی در تدریـس و کار با کودکان تیزهوش تا سـن ۸ سـال اشاره می‌کند و هر چند توصیه‌های او در این زمینه شـامل همهٔ موضوعات درسـی اسـت و تمرکزش تنها بر ریاضی نیسـت، اما مطالعهٔ پیشـنهادهای او در مورد رفتار با دانش‌آموزان تیزهوش، خالی از لطف نیسـت. همچنین، فصلی با موضوع «حمایت از کودکان تیزهوش در ریاضی» در ادواردز (۱۹۹۸) موجود اسـت که برای محدودهٔ سـنی دبستان نوشـته شده است. پایگاه مشـهور NRICH (به نشـانی www.nrich.maths.ogr) نیـز، حـاوی مـواد آموزشی مناسبی برای معلمان، در این زمینه است.

برای خطاهای ناشی از بی‌دقتی، نقش معلم می‌تواند اشاره به خطای اتفاق افتاده و دادن فرصت به دانش‌آموز برای تصحیح آن باشد. اما در بسیاری مواقع، عدم اشارهٔ مستقیم به پاسخ صحیح یا ارائهٔ چندین گزینه برای اصلاح خطای مورد نظر، راهکاری مؤثرتر است

مفاهیم مرتبط با این بخش

خلاقیت در ریاضی، تفاوت، تعمیم، حل مسئله.

معرفی مفهوم خطاها در ریاضی

معمولاً دانش‌آموزان، در انجام تکالیف نوشـتاری، انجام کارهای عملی و پاسـخ شفاهی به سؤالات معلم دچار **خطا**[8] می‌شوند. خطا می‌تواند ناشی از بی‌دقتی یا ناشی از انتخاب و استفادهٔ نادرست از فرآیندها باشد. خطاهای ناشی از بی‌دقتی و حواس‌پرتـی را می‌تـوان به کمک تمریـن و تکرار مرتفع ساخت، اما بحث اصلی ما، راجع به خطاهای فرآیندی است که می‌تواند دلایل مختلفی همچون درک نادرست از مفاهیم، به‌کارگیری روش‌های غلط و استفادهٔ نادرست از روابط و قواعد ریاضی داشـته باشد. نکتهٔ اساسی دیگر در مورد خطاها این اسـت که خود آن‌ها، می‌توانند ابـزاری برای آموزش ریاضی باشـند، به این معنا که معلمان در روش‌های تدریس خود، عمداً مرتکب خطاهای هدف‌داری می‌شوند و با هدف ایجاد توجه بیشـتر دانش‌آموزان به آن، موضـوع مورد یادگیری را طراحی و مدیریت کنند.

توضیح و بحث

به غیـر از درس آواشناسـی (آمـوزش زبـان مادری) اغلب خطاهای دانش‌آمـوزانِ دورهٔ ابتدایی، در درس ریاضی اتفـاق می‌افتد و دلیلش هم این اسـت که اکثر کارهایی که دانش‌آموزان در ریاضی انجام می‌دهند، به پاسخ‌هایی نیازمند اسـت که درست یا نادرسـت بودن آن‌ها، مورد قضاوت قرار می‌گیرد. مثلاً از دانش‌آموزان انتظار می‌رود که به‌درسـتی، اعمال ریاضـی را انجام دهند. البته موضـوع دقت در انجام تکلیف‌ها و فعالیت‌های ریاضی، بسیار مهم است و تا حدودی، انتظـارات و سـخت‌گیری‌ها در این زمینه قابـل توجیه‌اند. هیچ کدام از ما دوسـت نداریم توسط پرستاری که فرق بین میلی‌لیتر و لیتر را نمی‌داند، درمان شویم و یا هنگام معامله کردن، کسـی طرف معاملهٔ ما باشد که در انجام محاسبات عددی، دقیق نیسـت و به اشتباه، وقتی باید ۱۰۰ تومان به ما برگردانـد، ۷۲ تومان به ما پس بدهد. اکنون این سـؤال پیش می‌آیـد که یک معلم در هنـگام مواجهه با خطاهای دانش‌آمـوزان در درس ریاضی، چه در کارهای عملی مانند خطا در اندازه‌گیری و چه در پاسخ به سؤال‌های شفاهی، چه اقداماتی را بهتر اسـت انجام دهد. اینکه معلم دائماً اهمیت دقت در ریاضی را یادآور شـود و توجه دانش‌آموز را به انجام دقیق محاسبات جلب کند، لازم است اما کافی نیست.

یادآوری و اصلاح خطاها یک راهکار کوتاه‌مدت است که برای خطاهای پردازشـی کوچـک و کم‌اهمیت که در اصل، لحظه‌ای و ناشـی از عدم تمرکز هستند، مناسب است. برای خطاهای ناشـی از بی‌دقتی، نقش معلم می‌تواند اشـاره به خطای اتفاق افتاده و دادن فرصت به دانش‌آموز برای تصحیح آن باشـد. اما در بسیاری مواقع، عدم اشارهٔ مستقیم به پاسخ صحیح یا ارائهٔ چندین گزینه برای اصلاح خطای مورد نظر، راهکاری مؤثرتر است. دانش‌آموزان نیاز دارند که انجام خطاها را تجربـه کنند! به‌خصوص در مـورد خطاهای فرآیندی که نشـان‌دهندهٔ عدم درک صحیح آن‌ها از مفاهیم، فرآیندها و قواعد ریاضی اسـت. در ادامه، سعی داریم روش‌های مؤثری را در مواجهـه با خطاهای دانش‌آمـوزان در درس ریاضی و اسـتفاده از آن‌ها در تدریس ریاضی، از چهار منظر مختلف، مورد توجه و بررسی قرار دهیم.

به چالش کشیدن و تطابق

معلمان به ارتـکاب خطا از جانب دانش‌آموزان‌شـان نیازمندند، تا مشـخص کنند که تکلیف‌هایی که در اختیار دانش‌آموزان قرار داده‌اند، تا چه اندازه چالش‌برانگیز بوده‌اند. می‌توان گفت میزان چالش‌برانگیز بودن یک فعالیت ریاضی، با تعداد خطاهای انجام شـده توسط دانش‌آموزان در حین انجام آن، ارتباط مستقیم دارد. اگر دانش‌آموزی در پاسخ به سؤال‌های ریاضی، نسبتاً زیاد مرتکب خطا می‌شود، مهم‌ترین نتیجه از این امر این نیست که بگوییم آن دانش‌آموز در انجام آن کار، ناموفق و ناتوان است (اگرچه ممکن است این‌طور هم باشـد)، بلکه نتیجهٔ مهم را باید در مورد میزان تطابق سطح سؤال با سـطح دانش‌آموز دانست. شاید این

معلم اســت که در تطابق تکالیف با سطح دانش و توانایی دانش‌آموزان، ناموفق بوده است.

داشــتن نیم‌نگاهــی بــه بدفهمی‌هــا و پیش‌بینی وقوع خطا

آمــوزگاران می‌توانند از خطاهای مشــابه دانش‌آموزان در کلاس‌های دیگر یا ســال‌های قبل، برای به‌دست آوردن دیدگاهی مبتنی بر تجربه، نســبت به بدفهمی‌ها و ابهامات دانش‌آمــوزان اســتفاده کنند. این دیدگاه‌هــا به آنان کمک می‌کند تا درس ریاضیِ مورد نظر را، با آگاهی بیشتری راجع به چالش‌های موجود در آن، آموزش دهند. برای مثال، وقتی که یک دانش‌آموز ۹ ســاله، برای محاسبهٔ ۲۲۷-۳۴۰، پاسخ ۱۲۷ را می‌دهد، یک معلم باهوش و باتجربه، به‌سرعت ماهیت این خطا را تشخیص داده و بدون آن که در ارائهٔ پاسخ درست به دانش‌آموز عجله کند، از او می‌خواهد که نحوهٔ انجام تفریق خود را توضیح دهد. ممکن اســت پاســخ دانش‌آموز شامل این جمله باشــد که «اگر هفــت را از صفر کم کنیم، هفت باقی می‌ماند». در چنیــن حالتی، با تحلیل این خطا، معلم درمی‌یابد که مشکل کار به استفادهٔ نادرستِ «هیچ» به‌جای «صفر» برمی‌گردد و بدفهمی دانش‌آموز این اســت که عدد صفر، برایش همان هیچ است و چون هیچ است، می‌تواند آن را نادیده بگیرد. این دیدگاه در واقع، برای تشخیص خطا قبل از وقــوع، در کارهای بعدی و هنگام به‌کارگیری عدد صفر در محاسبات، می‌تواند یاری‌دهندهٔ معلم باشد.

بهره‌گیری از خطا برای یادگیری مؤثرتر (خطا در جهت کیفیت‌بخشی به آموزش)

خطاهایی را که دانش‌آموزان مرتکب می‌شــوند می‌توان به‌عنوان فرصت‌های سازنده در جهت غنا بخشیدن آموزش در نظر گرفت. هنگامی که یک خطا با فرآیند ارزیابی آن خطا همراه شود، یادگیری از اشتباهاتمان می‌تواند مؤثرترین نوع یادگیری در ریاضی باشد (بلک[۹]، ۲۰۰۳). این موضوع وقتی با استفاده از تعارض شناختی[۱۰] همراه شود، مؤثرتر نیز خواهد بود. مثلاً وقتی معلم با خطای تفریق که در بالا توضیح دادیم روبه‌رو می‌شود، از دانش‌آموز بخواهد که تفریق ۷-۱۰ را انجام دهد، زیرا مطمئن است که دانش‌آموز می‌داند پاسخ ۳ است. ســپس به او مجموعه‌ای از تفریق‌های مشــابه مانند ۷-۲۰، ۷-۳۰، ۷-۴۰ و ۷-۱۴۰ بدهد تا دانش‌آموز بتواند به عبارت ۷-۳۴۰ پاسخ درست دهد. حال معلم می‌تواند از دانش‌آموز بخواهد دوباره به تفریق ۲۲۷-۳۴۰ فکر و به‌طور مشابه، عمل کند. مشاهدهٔ این عبارت‌ها در کنار هم، می‌تواند باعث ایجاد یک تعارض شناختی سازنده در ذهن دانش‌آموز شده و او را قادر سازد که خطای اولیهٔ خود را تصحیح کند. مطمئناً این رویکرد معلم، مؤثرتــر از زمانی خواهد بود که معلم خودش مستقیماً برای دانش‌آموز توضیح دهد که خطای او کجاست و چگونه باید آن را اصلاح کند.

نحــوهٔ برخورد اخلاقی معلــم با خطاهای دانش‌آموزان

ایــن احتمال وجود دارد که یــک معلم، رفتاری را در کلاس پیشــه کند که براساس آن، خطاها و بدفهمی‌های دانش‌آمــوزان در ریاضی، بــا جریمه‌ها و تنبیه‌های متعدد همراه شــود. یا این که معلمی دیگــر، رویه‌ای اتخاذ کند کــه در آن هر خطــا، فرصتی بــرای تمــام دانش‌آموزان کلاس، جهت توســعهٔ درک و فهمشان از آن مسئله باشد. در رویکــرد دوم، هنگامی کــه دانش‌آموزی خطا می‌کند، در واقع از دید معلم یک مشــکل جزئی اســت و آن را به دیــد یک اتفاق مفید در کلاس نــگاه می‌کند. معلم حتی می‌تواند از دانش‌آموز، به‌خاطر وقوع این خطا تشــکر کند، زیرا فرصتی را برای تمام دانش‌آموزان فراهم کرده اســت که بیشــتر یاد بگیرنــد و از یک دامِ بالقــوه، رهایی یابند. رویکرد درست و منطقی نیز همین رویکرد است. معلمان ابتدایی نباید به دنبــال تبدیل کلاس خود به یک کلاس عاری از خطا باشند، بلکه باید اجازه دهند خطاها رخ دهند و حتــی گاهی خود عمداً، ایــن خطاها را انجام دهند. این رویکرد، از جانب «دفتر تعیین استانداردها در آموزش[۱۱]» (Ofsted) در انگلســتان نیز، مورد تأییــد قرار گرفت. اما در نقطــهٔ مقابــل، اگر ارتکاب خطا با برخورد نامناســب و قهرآلود و گاهی مواقع تنبیه و کم کردن نمره همراه شود، نه‌تنها کمکی به یادگیری بیشتر نمی‌کند، بلکه باعث بروز مشــکلات روانی مانند اضطراب ریاضی می‌شود که اعتماد بــه نفس، قــدرت خطرپذیری و فعالیــت دانش‌آموز را در کلاس، کاهش می‌دهد.

دفتر تعیین استانداردها در آموزش (Ofsted) معتقد اســت که معلمان با اتخــاذ رویکرد اخلاقــی محبت‌آمیز در برخورد با اشــتباهات و خطاهــای دانش‌آموزان، باعث می‌شــوند که آن‌ها، ترســی از خطاکردن نداشته باشند و موفق‌تــر عمل کنند. از این گذشــته، این دفتر به معلمان توصیه می‌کند که خطاها را به‌عنوان بخش غیرقابل‌انکاری از آموزش، در نظر بگیرند.

معلم حتی می‌تواند از دانش‌آموز، به‌خاطر وقوع این خطا تشکر کند، زیرا فرصتی را برای تمام دانش‌آموزان فراهم کرده است که بیشتر یاد بگیرند و از یک دامِ بالقوه، رهایی یابند. رویکرد درست و منطقی نیز همین رویکرد است

مثال‌های عملی

در ادامه، دو مثال از خطاهای متداول و واکنش صحیح معلم به آن‌ها را، ارائه می‌کنیم.

خطای فرآیندی در جمع

یک کودک ۵ ساله که جمع را با شمارشِ رو به بالا انجام می‌دهد، ممکن است خطاهایی مانند آنچه که در زیر مشاهده می‌کنید، انجام دهد:

۸+۴=۱۱ ۶+۵=۱۰ ۷+۳=۹

معلم از دانش‌آموز می‌خواهد که نشان دهد که چگونه این جواب‌ها را به دست آورده، در حالی‌که توجه دارد که در جمع ۳+۷، دانش‌آموز از هفت شروع به شمارش کرده است (هفت، هشت، نه)، به‌جای آنکه به‌طور صحیح، از هشت شروع به شمارش کند (هشت، نه، ده). این دانش‌آموز، از سه انگشت خود نیز استفاده می‌کند، اما به شیوه‌ای نادرست و با شروع از گفتن واژه هفت به‌جای واژه هشت، این کار را می‌کند. تحلیل این خطاها توسط معلم باعث می‌شود که در آموزش این فرآیندها، از عبارت‌های مناسب‌تری مانند «هفت و سه تا بیشتر» به‌جای عبارت گیج کنندهٔ «سه تا بشمار از هفت» استفاده کند. بنابراین، معلم با کسب تجارب بیشتری از خطاهای دانش‌آموزان، می‌تواند از الگوهای زبانیِ بهتری برای درک درست دانش‌آموزان در کارهای شفاهیِ بعدی خود، استفاده کند.

معلمان ابتدایی نباید به دنبال تبدیل کلاس خود به یک کلاس عاری از خطا باشند، بلکه باید اجازه دهند خطاها رخ دهند و حتی گاهی خود عمداً، این خطاها را انجام دهند

درک نادرست از ضرب اعداد اعشاری در مضارب ۱۰

گاهی معلمان ابتدایی، شاهد آن هستند که دانش‌آموزان ۱۱ ساله در انجام برخی از محاسبات بر روی مضارب ۱۰، به نتایج نادرستی می‌رسند. مثلاً حالتی مثل عبارت ۲/۳×۱۰=۲/۳۰ بسیار مشاهده شده است. معلم می‌تواند این خطا را به فرصتی برای درک عمیق‌تر دانش‌آموزان از ضرب اعداد اعشاری در مضارب ۱۰، تبدیل کند.

در مثال بالا، خطا به این دلیل رخ داده است که دانش‌آموز از یک قاعده در مورد ضرب در عدد ۱۰، به اشتباه استفاده کرده است. این قاعده «اضافه کردن صفر» نام دارد و حرفش این است که اگر عددی در ۱۰ ضرب شود، کافی است برای به‌دست آوردن حاصل، یک صفر به انتهای آن عدد اضافه شود. یک معلم باهوش می‌تواند از دانش‌آموزان بپرسد که «کدام عدد بزرگ‌تر است؟ ۲/۳ یا ۲/۳۰؟» و این سؤال، می‌تواند بحثی در کلاس به راه اندازد که در نهایت، مشخص شود دو عدد با هم برابرند. اکنون با به چالش کشیدن قاعدهٔ «اضافه کردن صفر»، این قانون در ذهن دانش‌آموز به زیر سؤال رفته است. به این ترتیب، اولین نشانه‌ها از تعارض شناختی در چهرهٔ دانش‌آموزان نمایان می‌شود. معلم سپس در کلاس، نمونه‌هایی از شرایط واقعی در زندگی را بیان می‌کند که به ضرب ۲/۳ در ۱۰ مربوط می‌شود. مثلاً می‌گوید، «۱۰ تخته چوب خریده‌ایم که طول هر کدامشان، ۲/۳ متر است. طول تمام تخته‌ها با هم، چقدر است؟ یا می‌گوید که «۲/۳ کیلوگرم شکلات خریده‌ایم که قیمت هر کیلوگرم، ۱۰ تومان است. چقدر باید به فروشنده پول بدهیم؟». مرتبط کردن مسئله به شرایط واقعی، می‌تواند در ذهن دانش‌آموز، تصور عینی‌تری از اشتباه او ایجاد کند. در نهایت، معلم به روش‌های دقیق‌ترِ محاسباتی از این نوع اشاره کرده و از همهٔ دانش‌آموزانی که در درک بهتر این موضوع و رفع این خطا کمک کرده‌اند، تشکر می‌کند.

مطالعهٔ بیشتر

کوکبرن (۱۹۹۹) به تعریف، شناسایی و چگونگی اصلاح برخی از خطاهای رایج ریاضی در سنین پایین‌تر پرداخته است. دِروز[12] نیز، مطالعهٔ مفیدی در مورد خطاهای محاسباتی کودکان و بدفهمی‌های آن‌ها، در فصل دوم از کتاب هانسون[13](۲۰۰۵) آورده است. اضافه بر اینها، مطالعهٔ مهم دیگری نیز توسط کوشی و همکاران (۲۰۰۰)، تحت عنوان «خطاها و بدفهمی‌های کودکان[14]»، انجام شده است.

مفاهیم مرتبط با خطاهای ریاضی

سنجش برای یادگیری، تعارض شناختی، جنسیت و ریاضی، جور بودن و ناجور بودن.

پی‌نوشت‌ها

1. Giftedness in Mathematics
2. Intelligence
3. Gardner
4. Logical-Mathematical Intelligence
5. Krutetskii
6. Koshy
7. Porter
8. Error
9. Black
10. Cognitive conflict
11. Office for Standards in Education: Ofsted
12. Drews
13. Hanson
14. Children's Mistakes and Misconception